Problema 1

Punto (a)

La retta t assegnata non è parallela all'asse delle y e ha equazione in forma esplicita

$$y = -7x + 12$$

da cui ricaviamo che il suo coefficiente angolare vale -7.

La funzione assegnata è razionale con denominatore che si annulla solo in 0, quindi il campo di esistenza è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ e su D è continua e derivabile infinite volte.

Una scrittura alternativa di $f_{a,b}$ semplifica leggermente i conti per le derivate: per ogni x nel dominio vale infatti

$$f_{a,b} = \frac{ax^3 + b}{x^2} = ax + \frac{b}{x^2}$$

da cui otteniamo

$$f'_{a,b} = a - \frac{2b}{x^3}$$

Il punto in cui vogliamo studiare la relazione di tangenza ha ascissa 1 e quindi ordinata $f_{a,b}(1) = a + b$. La retta assegnata passa per questo punto esattamente quando

$$a + b = -7 + 12 = 5$$

La derivata della funzione in $x = 1$ vale quindi $f'_{a,b} = a - 2b$. Poiché la derivata di una funzione in un punto x_0 (in cui la funzione è derivabile), calcolando il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa x_0, abbiamo che deve valere

$$a - 2b = -7$$

Mettendo le due condizioni a sistema e ricavando $b = 5 - a$ dalla prima abbiamo (andando a sostituire nella seconda equazione)

$$a = -7 + 2b \Rightarrow a = -7 + 2(5 - a) \Rightarrow a = -7 + 10 - 2a \Rightarrow 3a = 3$$

In particolare, solo una coppia di valori soddisfa la condizione del punto (a) del problema, cioè $(a, b) = (1, 4)$.

Punto (b)

Poniamo $a = 1$ e $b = 4$ e osserviamo che sono esattamente i due valori ricavati nel punto precedente. Ci interessa studiare la funzione $f(x) = f_{1,4}(x)$ e ricavare tutte le rette tangenti al grafico γ di f che passano per il punto $P = (1, 5)$. Una di esse sarà la retta t per quanto visto nel punto (a).

Campo di esistenza e derivate

Come già osservato nel punto (a), la funzione ha campo di esistenza D e su D è continua e derivabile infinite volte e lo stesso vale per le sue derivate. Derivando la derivata prima otteniamo la derivata seconda e quindi abbiamo

$$f = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} \qquad f' = 1 - \frac{8}{x^3} \qquad f'' = \frac{24}{x^4}$$

Simmetrie notevoli

Notiamo che $f(-x) = -x + \frac{4}{(-x)^2} = -x + \frac{4}{x^2}$ che non coincide, su D, né con f né con $-f$: la funzione non è né pari né dispari.

Segno e intersezioni con gli assi

La funzione è razionale fratta con denominatore x^2 che ha segno costante positivo su D. Il segno della funzione è quindi quello del suo numeratore:

$$f(x) \geq 0 \iff x^3 + 4 \geq 0 \iff x \geq \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

Da questa analisi abbiamo anche che l'unico zero della funzione ha ascissa $-\sqrt[3]{4}$ e che quindi γ interseca l'asse delle ascisse solo nel punto $A = (-\sqrt[3]{4}, 0)$. Non abbiamo intersezioni con l'asse delle ordinate poiché 0 non è nel dominio.

Limiti agli estremi del dominio e asintoti

Dobbiamo calcolare i limiti di f per x che tende a $0^+, 0^-, +\infty$ e $-\infty$.

Per i limiti a $\pm\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x + \frac{4}{x^2} = \pm\infty$$

La scrittura di f suggerisce che ci sia un asintoto obliquo. Verifichiamolo. Ricordiamo che $y = mx + q$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ se

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1$$

e se

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Di conseguenza la retta r: $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Questa retta ci servirà per il punto (d) del problema.

Quando x assume valori prossimi a 0, abbiamo che x^2 è infinitesimo ed è positivo, e quindi ha per limite 0^+. Deduciamo quindi che vale

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} x + \frac{4}{x^2} = +\infty$$

In particolare, la retta $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^\pm$.

Monotonia, punti stazionari e massimi e minimi locali

Nel dominio, poiché tutti i punti sono di derivabilità, la monotonia è regolata dal segno della derivata prima: studiamo il segno di $f'(x)$.

Abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff -\frac{8}{x^3} \geq -1 \leftrightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{8}$$

Se $x < 0$ l'equazione è soddisfatta, quindi possiamo concentrarci sul caso $x > 0$, per cui abbiamo $x^3 > 0$. Quindi, se assumiamo $x > 0$, la disequazione è equivalente a $x^3 > 8$ che ha soluzione $x > 2$. Riassumendo, per $x \in D$ vale

$$f'(x) \geq 0 \iff x \geq 2$$

e quindi la funzione è strettamente crescente se e solo se $x > 2$. Dall'analisi fatta abbiamo anche che l'unico punto stazionario soddisfa $x_m = 2$. Abbiamo quindi un punto di minimo locale poiché $f''(2) = \frac{24}{16} > 0$. Ai fini del grafico osserviamo che $f(2) = 3$, quindi il punto su γ con ascissa 2 è $B = (2, 3)$. Non è un punto di minimo assoluto poiché la funzione non è inferiormente limitata (cosa che segue dal calcolo dei limiti fatto prima).

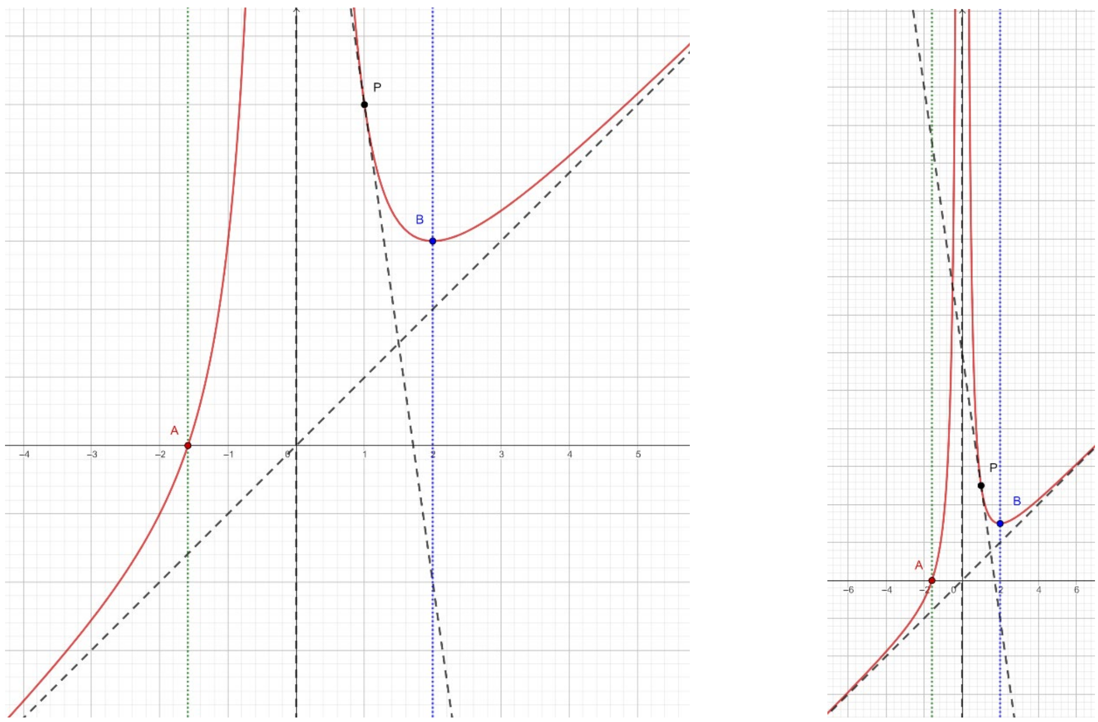
Non ci sono punti di massimo locale o assoluto.

Concavità e flessi

La concavità è regolata dal segno della derivata seconda. Essa è strettamente positiva sul dominio, quindi non abbiamo punti di flesso e la funzione ha concavità positiva su D.

Grafico qualitativo

Riassumendo le informazioni ricavate abbiamo che il grafico qualitativo della funzione è il seguente



Rette tangenti al grafico che passano per $P = (1, 5)$

Sia z un punto nel campo di esistenza di f. Il punto su γ con ascissa z ha coordinate

$Q = (z, f(z))$ e la retta tangente a γ in Q ha equazione

$$y - f(z) = f'(z)(x - z)$$

Vogliamo che questa retta passi per $P = (1, 5)$, quindi stiamo cercando z tale che

$$5 - f(z) = f'(z)(1 - z)$$

Andando a sostituire in questa espressione abbiamo

$$5 - z - \frac{4}{z^2} = \left(1 - \frac{8}{z^3}\right)(1 - z)$$

che è equivalente a

$$\frac{-z^3+5z^2-4}{z^2}=\frac{-z^4+z^3+8z-8}{z^3}$$

Per $z \neq 0$, possiamo fare denominatore comune e semplificare il denominatore per ottenere

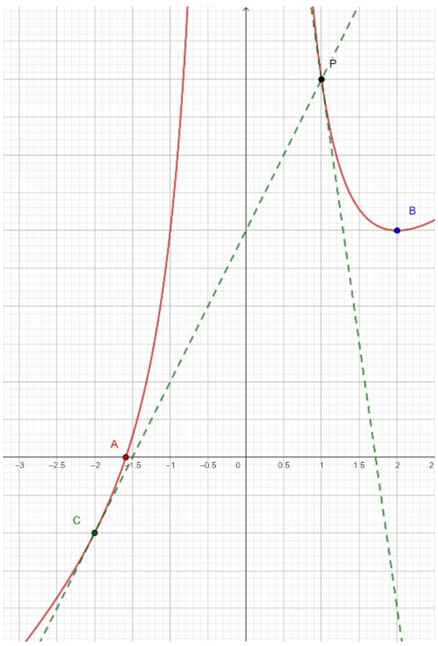
$$p(z)=4z^3-12z+8=0$$

come equazione risolvente. Sappiamo che 1 deve essere radice del polinomio (perché la tangente al grafico in P passa per P!) ma abbiamo anche un'altra radice: -2.

Abbiamo $f(-2)=-2+\frac{4}{(-2)^2}=-1$ e $f'(-2)=1-\frac{8}{(-2)^3}=2$ quindi la tangente al grafico in $C=(-2,-1)$ è

$$s\colon\ y=2x+3$$

che in effetti passa per il punto P poiché $5=2\cdot(1)+3$.



Come specificato nel testo, sono esattamente due le tangenti al grafico passanti per P.

Questo si potrebbe dimostrare (anche se non viene richiesto), osservando che

$$p(z)=4(z-1)^2(z+2)$$

Punto (c)

Le intersezioni tra γ e la retta

$$y - 5 = m(x - 1)$$

si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y - 5 = m(x - 1) \\ y = f(x) \end{cases}$$

Interpretando m come parametro reale. Osserviamo, prima di lanciarci nei conti, che il fascio assegnato è il fascio di rette passanti per P, quindi il punto P sarà soluzione del sistema per ogni valore di m.

Ricavando dalla prima equazione l'espressione $y = 5 + m(x - 1)$ e sostituendo nella seconda abbiamo l'equazione risolvente

$$5 + mx - m = x + \frac{4}{x^2}$$

che, per $x \neq 0$, è equivalente a

$$g(x) = (m - 1)x^3 + (-m + 5)x^2 - 4 = 0$$

Come osservato prima, $x = 1$ deve essere soluzione dell'equazione, cosa che in effetti accade. Possiamo quindi utilizzare l'algoritmo di Ruffini per fattorizzare il polinomio:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & m-1 & -m+5 & 0 & -4 \\ 1 & & m-1 & 4 & \\ \hline & m-1 & 4 & 4 & // \end{array}$$

Abbiamo quindi la fattorizzazione

$$g(x) = (m - 1)x^3 + (-m + 5)x^2 - 4 = (x - 1)\big((m - 1)x^2 + 4x + 4\big) = (x - 1)q(x)$$

Il polinomio $q(x)$ ha discriminante Δ che soddisfa

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot \big((m - 1)\big) \cdot 4 = 16(1 - m + 1) = 16(m - 2)$$

che è nullo per $m \neq 2$. Inoltre $q(1) = (m - 1) + 4 + 4 = m - 7$, quindi l'unico valore di m per cui q ha 1 come radice esattamente quando $m = -7$.

Notiamo che i due valori particolari -7 e 2 di m corrispondono rispettivamente alle rette t e s ricavate nei punti precedenti.

Se $m = 2$ vale $q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ e quindi

$$g(x) = (x - 1)(x - 2)^2$$

Se $m \neq 2$ e $m = -7$ si ha $q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ e quindi

$$g(x) = (x - 1)(x - 2)^2$$

In particolare, se $m \neq -7$, si ha $q(x) = -8x^2 + 4x + 4 = -4(x - 1)(2x + 1)$ e quindi

$$g(x) = -4(x - 1)^2(2x + 1)$$

Infine, se $m \neq 2$ e $m \neq -7$, abbiamo che $g(x) = (x - 1)q(x)$ con $q(x)$ che ha due radici distinte e diverse da 1.

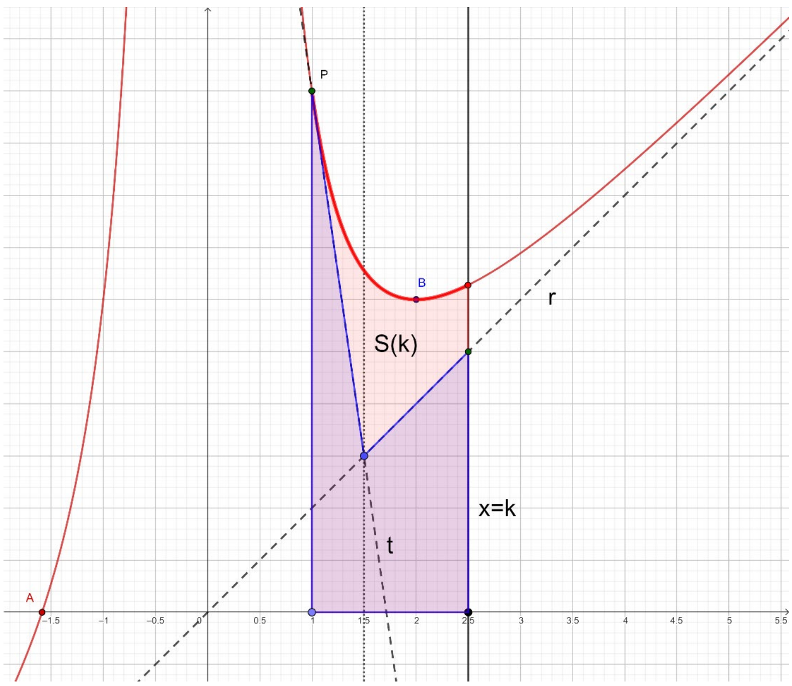
Il numero di intersezioni di γ con una retta del fascio è quindi 2 se $m = 2$ o $m = -7$ mentre vale 3 se $m \neq 2$ e $m \neq \ -7$.

Punto (d)

Rappresentiamo la regione di piano $S(k)$ assegnata. Il punto di intersezione tra le rette r (l'asintoto ricavato in (b)) e la retta t assegnata si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = x \end{cases}$$

ed è il punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



L'area richiesta, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e per le proprietà degli integrali definiti, è pari a

$$S(k) = \int_1^{\frac{3}{2}} \big(f(x) - (-7x + 12)\big)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} (f(x) - x)dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (7x - 12)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} f(x)dx - \int_{\frac{3}{2}}^{k} x\,dx =$$

$$= \int_1^{k} f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (7x - 12)dx - \int_{\frac{3}{2}}^{k} x\,dx$$

L'insieme $I = (1, +\infty)$ è un intervallo su cui f e le altre funzioni coinvolte sono continue quindi le primitive che ci interessano (sugli intervalli di integrazione) sono

$$\int f(x)dx = \int x + \frac{4}{x^2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + c_1$$

$$\int 7x - 12\,dx = \frac{7x^2}{2} - 12x + c_2$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_3$$

Abbiamo quindi

$$\int_1^{k} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right]_1^{k} = \frac{k^2}{2} - \frac{4}{k} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{k^3 + 7k - 8}{2k}$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} 7x - 12dx = \left[\frac{7x^2}{2} - 12x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{7 \cdot 9}{8} - 18 - \frac{7}{2} + 12 = -\frac{13}{8}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{k} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^{k} = \frac{k^2}{2} - \frac{9}{8}$$

Di conseguenza abbiamo

$$S(k) = \frac{k^3 + 7k - 8}{2k} - \frac{13}{8} - \frac{k^2}{2} + \frac{9}{8} = 3 - \frac{4}{k}$$

Il limite richiesto quindi vale

$$\lim_{k\to+\infty} S(k) = \lim_{k\to+\infty} 3 - \frac{4}{k} = 3$$

Questo vuol dire che l'area della regione del piano (illimitata) delimitata dal grafico γ e dalle condizioni $y \geq -7x + 12$ e $y \geq x$ ha area finita, pari a 3.

Problema 2

Punto (a)

Procediamo per casi:

Se $n = 2$, la funzione diventa:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$$

ed è continua in $x = 0$.

La derivata è data da:

$$f_2'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} & se\ x > 0 \\ -1 - \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Perciò abbiamo $\lim_{x \to 0^+} f_2' = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f_2' = -1$ e la funzione presenta perciò un punto angoloso.

Se $n > 2$ scriviamo la funzione $f_n(x)$ come $f_n(x) = x^{\frac{2}{n}} - (ax^2 + bx + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Scriviamo la derivata

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{1}{2}(ax^2 + bx + 1)^{-\frac{1}{2}}(2ax + b)$$

che equivale a

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} \sqrt[n]{x^{2-n}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$$

e, poiché $n > 2$, possiamo riscrivere

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-2}}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$$

che non è definita per $x = 0$, perciò in tale punto la funzione $f_n(x)$ con $n > 2$ non è mai derivabile.

Determinare i parametri a e b

Osserviamo che, in base alle informazioni fornite dal grafico, il grafico della funzione passa per i punti di coordinate $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, perciò deve essere

$$1 = |1| - \sqrt{a + b + 1}$$

e

$$1 = |-1| - \sqrt{a-b+1}$$

da cui troviamo

$$\sqrt{a+b+1} = \sqrt{a-b+1} = 0$$

Perciò

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a-b+1=0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $b = 0$ (come avremmo potuto dedurre direttamente, dato che $f_2(x)$ deve essere una funzione pari) e $a = -1$.

Punto (b)

Campo di esistenza e derivata prima

La funzione ha dominio $[-1, 1]$ e ha derivata

$$g'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se\ x > 0 \\ -1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Simmetrie notevoli

Notiamo che $g(-x) = |-x| + \sqrt{(1-(-x)^2)} = |x| + \sqrt{(1-x^2)} = g(x)$.

$g(x)$è, perciò, una funzione pari.

Segno e intersezioni con gli assi

La funzione è somma di due termini, entrambi positivi o nulli, che si annullano in corrispondenza di valori di x diversi, perciò è sempre positiva.

Per $x = 0$ abbiamo $g(0) = |0| + \sqrt{(1-0^2)} = 1$, perciò l'unica intersezione con gli assi è il punto $(0, 1)$.

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = |-1| + \sqrt{(1-(-1)^2)} = 1 + 0 = 1$$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = 1$ per la simmetria della funzione

Punti di non derivabilità, e punti stazionari

$$g'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se\ x>0 \\ -1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se\ x<0 \end{cases}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{0}{\sqrt{1-0}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x)=\lim_{x\to 0^-} -1-\frac{0}{\sqrt{1-0}}=-1$$

Il punto di ascissa $x=0$ è quindi un punto angoloso.

$$\lim_{x\to -1^+} g'(x)=\lim_{x\to -1^+} -1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to -1^+} -1-\frac{-1}{\sqrt{1-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x)=\lim_{x\to -1^+} 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to -1^+} -1-\frac{1}{\sqrt{1-1}}=-\infty$$

La funzione non è quindi derivabile nei punti di ascissa $x=\pm 1$.

Risolviamo $g'(x)=0$

Se $x>0$ abbiamo

$$1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0\to \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=1\to x=\sqrt{1-x^2}$$

da cui ricaviamo

$$x=\sqrt{1-x^2}\to x^2=1-x^2\to 2x^2=1\to x=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Consideriamo qui, per le limitazioni del dominio, solo la radice positiva, ma, per simmetria della funzione abbiamo che anche $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ è un punto stazionario.

Studiando il segno della derivata abbiamo che

$$g'(x)>0 \text{ per } 0<x<\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

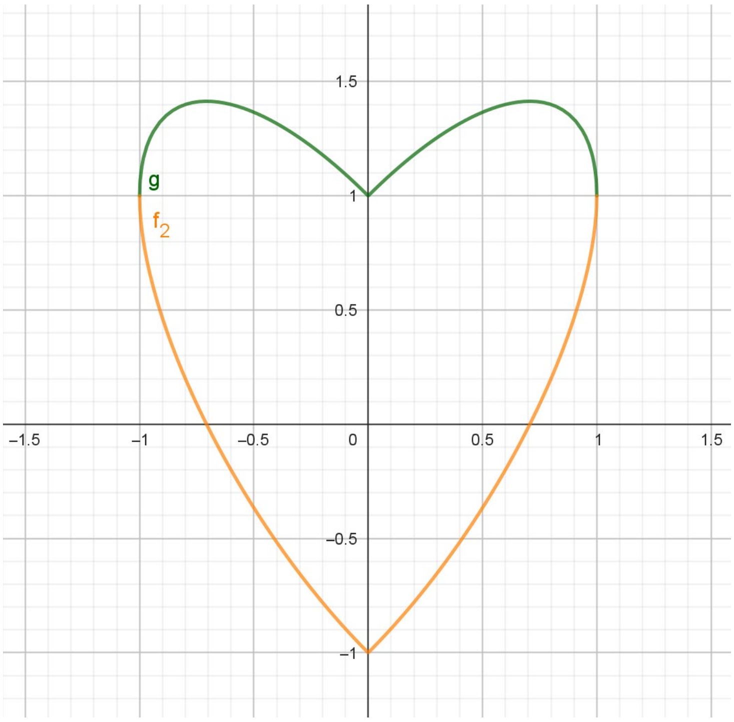
perciò il punto $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ è un punto di massimo relativo, così come, nuovamente per simmetria, il punto $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Concavità e flessi

Studiamo la derivata seconda

$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

che è negativa in tutto il dominio, perciò la concavità è sempre verso il basso e non ci sono flessi a tangente obliqua.



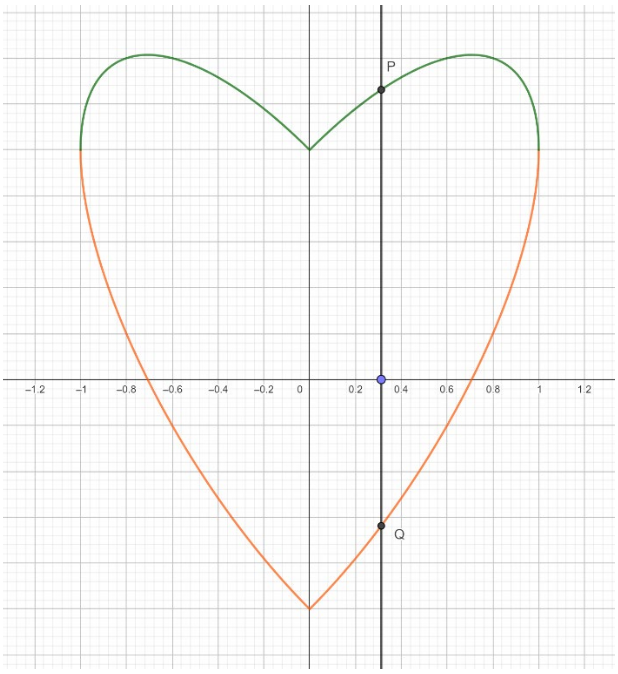
Punto (c)

Ricaviamo le intersezioni di γ con la retta $x = k$. Questi si ottengono risolvendo i sistemi

$$\begin{cases} x = k \\ y = f_2(x) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = k \\ y = g(x) \end{cases}$$

che hanno entrambi una sola soluzione (assumendo $k \in [-1, 1]$). Otteniamo i punti

$$P = \left(k, |k| + \sqrt{1-k^2}\right) = \left(k, g(k)\right) \qquad \text{e} \qquad Q = (k, f_2(k)) = \left(k, |k| - \sqrt{1-k^2}\right)$$



La distanza tra i due punti vale quindi

$$m(k) = dist(P, Q) = |g(k) - f_2(k)| = \left||k| + \sqrt{1-k^2} - |k| + \sqrt{1-k^2}\right| = 2\sqrt{1-k^2}\,.$$

La funzione m ha per grafico una semicirconferenza di raggio 1 centrata nell'origine e quindi ha massimo per $k = 0$. Sappiamo già che la retta $x = 0$ è asse di simmetria per γ poiché le funzioni f_2 e g sono pari e quindi i grafici sono simmetrici rispetto alla retta $x = 0$. Notiamo che se $k \neq 0$ la retta $x = k$ non può essere di simmetria perché i campi di esistenza delle funzioni i cui grafici compongono γ sono simmetrici solo rispetto a 0. Quindi l'unico asse di simmetria della figura del tipo $x = k$ è l'asse delle ordinate.

Punto (d)

Per verificare quanto richiesto deriviamo $H(x)$ e verifichiamo che è uguale a $h(x)$.

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

sommando il primo e il terzo termine otteniamo

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} = h(x)$$

Le funzioni sono continue sull'intervallo $[-1,1]$ e abbiamo

$$g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} \geq |x| - \sqrt{1-x^2} = f_2(x)$$

quindi, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e per la simmetria, l'area richiesta vale

$$A = \int_{-1}^{1} g(x) - f_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 2h(x) dx = [2H(x)]_{-1}^{1} = 4[H(x)]_0^1 =$$

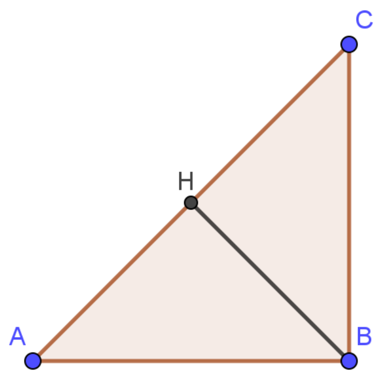
$$= \frac{4}{2}\left(\arcsin(1) - 1 \cdot \sqrt{1-1^2}\right) - \frac{4}{2}\left(\arcsin(0) - 0 \cdot \sqrt{1-1^2}\right) = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Questionario

Quesito 1

Dividiamo la dimostrazione in due parti.

1ª parte



Dati ABC triangolo rettangolo in B, BH altezza relativa all'ipotenusa

Hy: $AB \cong BC$

Th: $BH \cong \frac{1}{2}AC$

Osserviamo che, se un triangolo è rettangolo e isoscele, allora è congruente alla metà di un quadrato e l'ipotenusa è congruente alla diagonale di tale quadrato.

Inoltre, l'altezza relativa alla base di un triangolo isoscele è anche bisettrice dell'angolo al vertice e divide a metà la base stessa; perciò, otteniamo che l'angolo $H\hat{B}A$ è metà di un angolo retto ed è quindi congruente agli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$. Il triangolo ABH è perciò isoscele e poiché vale $AH \cong \frac{1}{2}AC$ (l'altezza relativa alla base di un triangolo isoscele è anche mediana) otteniamo la tesi.

2ª parte

Dati ABC triangolo rettangolo in B, BH altezza relativa all'ipotenusa

Hy: $BH \cong \frac{1}{2} AC$

Th: $AB \cong BC$

Consideriamo gli angoli $H\hat{A}B$ e $H\hat{A}C$. Poiché ABC è rettangolo, deve essere

$$H\hat{A}B + H\hat{C}B = 90°$$

Consideriamo gli angoli $H\hat{B}A$ e $H\hat{A}B$. Poiché ABH è rettangolo, deve essere

$$H\hat{B}A + H\hat{A}B = 90°$$

Perciò si ha:

$$H\hat{C}B \cong H\hat{B}A$$

Analogamente abbiamo

$$H\hat{A}B \cong H\hat{B}C$$

I triangoli ABH e BCH sono perciò simili e sono simili al triangolo ABC.

Perciò, in particolare, $AH : HB = HB : CH$, da cui, considerando le misure

$$\begin{cases} AH \cdot CH = HB^2 \\ AH + CH = AC = 2HB \end{cases}$$

I due numeri (positivi) AH e CH sono quindi tali che il loro prodotto è pari a HB^2 e la loro somma è $2HB$. Di conseguenza

$$(x - AH)(x - CH) = x^2 - 2HB\,x + HB^2 = (x - HB)^2\,.$$

Siccome la fattorizzazione dei polinomi è unica, abbiamo

$$AH = CH = HB$$

Da cui deduciamo che i triangoli ABH e BCH non sono solo simili ma anche congruenti e isosceli. Come già osservato, ABC è simile a ABH (e a BCH) ed è quindi isoscele a sua volta.

Quesito 2

Il lancio di una moneta per 5 volte può essere modellizzato con una distribuzione binomiale.

Dato che la probabilità di ottenere testa è p, la probabilità di non ottenere croce è $(1-p)$.

La probabilità di ottenere testa per esattamente due volte in cinque lanci è:

$$P_2(p) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

Per trovare il massimo della probabilità richiesta cerchiamo il massimo della funzione, derivandola. Invece di svolgere i prodotti, in questo caso, conviene utilizzare la regola di derivazione del prodotto:

$$P_2'(p) = 20p \cdot (1-p)^3 + 10p^2 \cdot (-1) \cdot 3(1-p)^2 = 10p(1-p)^2[2(1-p) - 3p] =$$
$$= 10p(1-p)^2(2-5p)$$

Gli zeri della derivata sono quindi $p = 0, p = 1, p = \frac{2}{5}$.

I primi due valori risultano in $P_2(p) = 0$, come ci aspettiamo, dato che, se la probabilità di ottenere testa è 0 oppure 1, è impossibile ottenere esattamente due teste in cinque lanci.

Il terzo valore è, dunque, il valore cercato.

Quesito 3

Coordinate di H

Verifichiamo che il punto P non appartiene al piano π

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 5 \neq 0$$

Per determinare le coordinate di H scriviamo le equazioni parametriche della retta passante per H e perpendicolare a π. Il vettore dei coefficienti del piano è $(3, -2, 0)$ e la retta deve passare per $P(4, 2, 1)$, perciò abbiamo:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo le equazioni all'interno dell'equazione del piano e otteniamo:

$$3(4 + 3t) - 2(2 - 2t) + 5 = 0$$

Risolviamo per t

$$12 + 9t - 4 + 4t + 5 = 0 \to 13t = -13 \to t = -1$$

Sostituendo nel sistema precedente otteniamo il punto $H(1, 4, 1)$

Intersezione tra s e π

Per calcolare l'intersezione di una retta e un piano date le equazioni cartesiane di entrambi, mettiamo a sistema le relative equazioni:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ricavando x dalla seconda e sostituendo nella prima, abbiamo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x = y - 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3y - 3 - 2y + 5 = 0 \\ x = y - 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x = y - 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = -2 - 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Il punto di intersezione ha quindi coordinate $(-3, -2, 2)$.

Quesito 4

Scriviamo l'equazione nella forma $x^3 + x = \cos\ x$ e definiamo

$$f(x) = x^3 + x \text{ e } g(x) = \cos x$$

Osserviamo che la funzione $f(x)$ è monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$, mentre $g(x)$ è monotona descrescente sull'intervallo $[0, \pi]$. (

In particolare, quindi, entrambe le funzioni sono monotone (una crescente, l'altra decrescente), anche su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Inoltre, abbiamo che $f(0) = 0,\ g(0) > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, perciò, nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esiste un'unica soluzione dell'equazione $f(x) = g(x)$ e quindi dell'equazione inizialmente data.

Per $x > \frac{\pi}{2}$ l'equazione $f(x) = g(x)$ non ammette soluzioni; infatti, si ha che per $x > \frac{\pi}{2}$ $f(x) > \pi^3 + \pi$, mentre $-1 < g(x) < 1$, perciò la soluzione trovata in precedenza è l'unica soluzione positiva dell'equazione assegnata.

Quesito 5

Una generica funzione polinomiale di quarto grado può essere scritta come:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

dove a, b, c, d, e sono generici parametri reali.

La richiesta che il grafico di $p(x)$ sia tangente all'asse x nell'origina, implica, in particolare il passaggio per il punto $(0,0)$, perciò:

$$p(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + e = 0$$

da cui otteniamo $e = 0$.

Inoltre, poiché vogliamo che il grafico di $p(x)$ sia tangente all'asse x in questo punto, avremo anche:

$$p'(0) = 0$$

Perciò:

$$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$p'(0) = 0 + 0 + 0 + d = 0$$

da cui otteniamo $d = 0$.

Sappiamo, inoltre, che il grafico della funzione passa per il punto $(1,0)$, perciò abbiamo:

$$p(1) = a + b + c = 0$$

Inoltre, sappiamo che $p(x)$ ha un punto stazionario in $(2, -2)$, perciò:

$$p(2) = 16a + 8b + 4c = -2$$

$$p'(2) = 32a + 12b + 4c = 0$$

Per ricavare i coefficienti a, b, c occorre quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c = -1 \\ 8a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione possiamo ricavare che:

$$4c = -4a - 4b$$

Che ci permette, sostituendo l'espressione appena ricavata nelle ultime due equazioni, di riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 12a+4b=-2 \\ 28a+8b=0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo per 2 la seconda equazione e sottraiamo membro a membro la seconda dalla terza.

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 12a+4b=-2 \\ 28a+8b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 24a+8b=-4 \\ 28a+8b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a=4 \\ 28a+8b=0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi $a=1$, da cui, sostituendo, ricaviamo $b=-\frac{7}{2}$ e $c=\frac{5}{2}$.

La funzione cercata è quindi

$$p(x)=x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

Quesito 6

Per prima cosa osserviamo che:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt = -\int -\frac{1}{t^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

e che $-\frac{1}{t^2}$ è la derivata di $\frac{1}{t}$.

Perciò, per l'integrazione delle funzioni composte, abbiamo che

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt = -\sin\left(\frac{1}{t}\right)+c$$

La funzione $F(x)$ può perciò essere scritta come:

$$F(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{a}\right)$$

Abbiamo, quindi:

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -1+\sin\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$\sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{1}{a} = \frac{5}{6}\pi+2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Con la condizione aggiuntiva che sia $0 < a \leq \frac{2}{\pi}$.

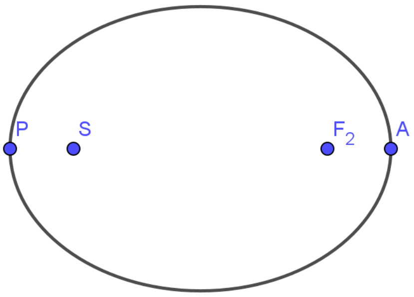
$$\frac{1}{a} = \frac{\pi+12k\pi}{6} \vee \frac{1}{a} = \frac{5\pi+12k\pi}{6} \rightarrow a = \frac{6}{\pi(12k+1)} \vee a = \frac{6}{\pi(12k+5)}$$

Osserviamo che, poiché k deve essere intero e siccome vogliamo $a > 0$, i valori che ci interessano devono essere positivi. Inoltre, poiché al crescere di k i valori di a decrescono, vogliamo il minimo valore di k possibile per cui $a \leq \frac{2}{\pi}$.

Per $k = 0$ i valori ricavati dalle due espressioni sono $\frac{6}{\pi}$ e $\frac{6}{5\pi}$ ma solo il secondo soddisfa $a \leq \frac{2}{\pi}$.
Quando $k \geq 1$ otteniamo sempre valori minori, quindi il massimo cercato si ha per $a = \frac{6}{5\pi}$.

Quesito 7

L'orbita della Terra intorno al Sole è ellittica e il Sole occupa uno dei due fuochi, come in figura (in cui le dimensioni non sono in scala per maggiore chiarezza).



In figura P rappresenta la posizione della Terra al perielio, A la posizione della Terra all'afelio, S la posizione del Sole ed F_2 il secondo fuoco.

Chiamando $2a = PA$ la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse e $2c = SF_2$ la distanza tra i due fuochi abbiamo che

$$2a = PS + SA = 1{,}47 \cdot 10^{11} + 1{,}52 \cdot 10^{11} = 2{,}99 \cdot 10^{11}$$

$$2c = SA - PS = 1{,}52 \cdot 10^{11} - 1{,}47 \cdot 10^{11} = 0{,}05 \cdot 10^{11}$$

da cui, dividendo per 2:

$$a = 1{,}495 \cdot 10^{11}$$

$$c = 0{,}025 \cdot 10^{11}$$

Possiamo quindi ricavare (il quadrato del)la lunghezza del semiasse minore dell'ellisse:

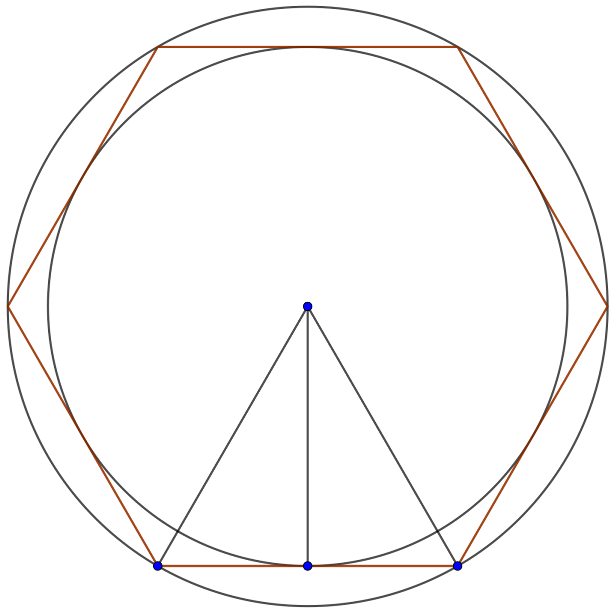
$$b^2 = a^2 - c^2 = 2{,}235025 \cdot 10^{22} - 0{,}000625 \cdot 10^{22} = 2{,}2344 \cdot 10^{22}$$

L'equazione dell'orbita cercata, scegliendo un sistema di riferimento che abbia l'origine nel centro dell'ellisse e gli assi dell'ellisse sugli assi cartesiani e approssimando alla terza cifra decimale risulta:

$$\frac{x^2}{2{,}235 \cdot 10^{22}} + \frac{y^2}{2{,}234 \cdot 10^{22}} = 1$$

Quesito 8

A partire dalla definizione di apotema come distanza tra il centro di un poligono e il punto medio di uno dei suoi lati, possiamo osservare che l'apotema di un esagono regolare corrisponde all'altezza di un triangolo equilatero il cui lato coincide con il raggio della circonferenza circoscritta all'esagono.



Perciò la relazione tra il raggio R della circonferenza circoscritta all'esagono e l'apotema a dell'esagono stesso è:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}R \text{ o, equivalentemente } R = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

Sostituendo i dati forniti dal brano otteniamo

$$5{,}196 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6$$

Che è un'approssimazione molto buona del valore esatto.

Affinché sia possibile pavimentare un piano con mattonelle a forma di poligono regolare tutte congruenti tra loro è necessario che un numero intero di mattonelle possa essere accostato intorno a un punto senza sovrapposizioni e senza lasciare spazi vuoti.

In altre parole, è necessario che l'angolo interno del poligono regolare sia un divisore di 2π.

L'angolo interno di un poligono regolare con p lati è $\frac{\pi(p-2)}{p}$. Se immaginiamo di accostarne intorno a un punto un numero q otteniamo $\frac{\pi(p-2)q}{p} = 2\pi$.

Da cui, dividendo per $2pq$

$$\frac{(p-2)}{2p} = \frac{1}{q} \to \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \to \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

Poiché sia p, sia q sono numeri interi maggiori o uguali a 3, abbiamo che le uniche possibili soluzioni sono:

$p = 3, q = 6$, che corrisponde a una tassellazione in triangoli equilateri a 6 a 6;

$p = q = 4$, che corrisponde a una tassellazione in quadrati a 4 a 4;

$p = 6, q = 3$, che corrisponde a una tassellazione in esagoni regolari a 3 a 3.

Per dimostrare l'effettiva esistenza delle tre tassellazioni indicate è possibile rappresentare sul piano cartesiano opportuni fasci di rette e verificare che le intersezioni tra opportune rette dei fasci corrispondono ai vertici della pavimentazione.

Per esempio, per la tassellazione in triangoli equilateri è possibile utilizzare i tre fasci di rette parallele ai tre lati di un triangolo equilatero assegnato, utilizzando le rette in modo che la distanza tra due rette nello stesso fascio sia congruente all'altezza del triangolo;

per la tassellazione in quadrati è possibile utilizzare due fasci di rette parallele agli assi cartesiani, utilizzando solo le rette con ascissa o ordinata intera, rispettivamente;

per la tassellazione in esagoni è possibile partire da quella in triangoli, combinandoli in modo opportuno per formare un esagono.